

## Réduction de Jordan (par la dualité)

**Lemme 1.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $q \geq 1$ . Pour tout  $x \in E$  tel que  $u^{q-1}(x) \neq 0$ , la famille  $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1 \leq k \leq q-1}$  est une famille libre de  $E$  et l'ev  $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$  est  $u$ -stable.

*Démonstration.*

Comme  $u^{q-1} \neq 0$  il existe  $x \in E$  tel que  $u^{q-1}(x) \neq 0$ .

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in K$  tels que :

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

Montrons par récurrence sur  $j$  que les  $\lambda_j$  sont tous nuls.

$$0 = u^{q-1} \left( \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{q-1+k}(x) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$$

Et puisque  $u^{q-1}(x) \neq 0$  on a  $\lambda_0 = 0$ .

Supposons que  $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$ , alors  $\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ , et :

$$0 = u^{q-j-2} \left( \sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{q-j-2+k}(x) = \lambda_{j+1} u^{q-1}(x)$$

Et à nouveau, on en déduit que  $\lambda_{j+1} = 0$ . Les  $\lambda_j$  sont donc tous nuls et la famille  $\mathcal{B}_{u,x}$  est libre.

La stabilité de  $F$  par  $u$  découle alors du fait que  $u$  est nilpotent. □

**Théorème 2.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $q \geq 1$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B} = B_1 \cup \dots \cup B_r$  de  $E$  telle que chaque s.e.v.  $E_i = \text{Vect } \mathcal{B}_i$  soit stable par  $u$  et que la matrice de  $u|_{E_i}$  soit :

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(\mathbb{K}), \text{ avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i$$

*Démonstration.*

On va montrer le théorème par récurrence sur la dimension  $n$  de  $E$ , pour cela cherchons auparavant une décomposition de  $E$  en somme directe adaptée.

On peut remarquer que comme  $u$  est nilpotent d'indice  $q$  alors  ${}^t u$  est nilpotent d'indice  $q$ .

On peut alors appliquer le lemme à  ${}^t u$  : il existe  ${}^t u^{q-1}(\varphi) \neq 0$ , et on pose  $H = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, {}^t u^{q-1}(\varphi))$ .

De plus, comme  ${}^t u^{q-1}(\varphi) \neq 0$ , il existe  $x \in E$  tel que  $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$  et donc  $u^{q-1}(x) \neq 0$ .

On pose  $F = \text{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$  qui, d'après le lemme, est de dimension finie  $q$ .

Soit maintenant  $G = H^\circ$ , on a :

$$\dim E = \dim E^* = \dim G + \dim H = \dim G + \dim F$$

Comme  $H$  est  ${}^t u$ -stable,  $G$  est  $u$ -stable. Montrons que  $F \cap G = \{0\}$ .

Soit  $y = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$ .

Comme  $G$  est  $u$ -stable,  $u^{q-1}(y) \in G$ , et :

$$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q-1+k}(x)) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$$

Donc  $\lambda_0 = 0$ , puis, par une récurrence similaire à celle du lemme, on montre que tous les  $\lambda_k$  sont nuls et donc que  $F \cap G = \{0\}$ . Ainsi,  $E = F \oplus G$ .

Montrons maintenant le résultat principal par récurrence sur  $n$ .

Le résultat est évident pour  $n = 1$ .

Supposons le résultat acquis au rang  $n - 1$ , montrons le au rang  $n$ .

On complète la base  $\mathcal{B}_{u,x}$  de  $F$  par une base de  $G$  en une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . On a alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbb{K})$$

$A_{n-q}$  est la matrice de  $u|_G$  dans la base considérée. Si  $q = n$  c'est fini, sinon on applique l'hypothèse de récurrence à  $u|_G$  qui est bien un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à  $q$ . □

**Théorème 3.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  non nul tel que  $\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et  $\Pi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ . Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  soit de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_\rho \end{pmatrix}$$

avec pour tout  $k \in \llbracket 1, \rho \rrbracket$  :

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \quad \text{où} \quad \varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$$

*Démonstration.*

D'après le lemme des noyaux appliqué à  $\chi_u$  on a  $E = \bigoplus_{k=1}^p N_k$ .

Chaque sous-espace  $N_k$  est de dimension  $\alpha_k$  et stable par  $u$ . De plus,  $v_k = (u - \lambda_k Id)|_{N_k}$  est nilpotente d'indice

$\beta_k$ . Il existe donc une base  $\mathcal{B}_k$  de  $N_k$  telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(v_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{\alpha_k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & 0 \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \text{ où } \varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$$

et donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u|_{N_k}) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\alpha_k}(\mathbb{K})$$

□

**Conclusion.** Toute matrice d'endomorphisme nilpotent peut s'écrire sous la forme d'une matrice par blocs diagonale, dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan. ◁

## Références

[Rom] Jean-Étienne Rombaldi. *Algèbre et Géométrie*. DeBoeck